

Nullstellen Dirichletscher L-Funktionen und ihrer Ableitungen

Diplomarbeit

von

Jan Brase

geboren am 20. November 1970 in Hannover

1999

Referent: Prof. Dr. G.J. Rieger

Korreferent: Dr. J. Steuding

Abstract

Wir beschäftigen uns mit Dirichletschen L -Funktionen. In der Einleitung werden zunächst Aussagen über die Riemannsche Zetafunktion gemacht, die wir in Kapitel 2 auf Dirichletsche L -Funktionen verallgemeinern. Besondere Bedeutung messen wir hier Satz 1.1 von Levinson und Montgomery bei, der besagt, dass ζ und ζ' in etwa die gleiche Anzahl Nullstellen im kritischen Streifen haben. Erstmals beweisen wir diesen Sachverhalt allgemein für Dirichletsche L -Funktionen in Satz 2.6. Dazu benötigen wir eine neue Schreibweise für die Funktionalgleichung Dirichletscher L -Funktionen, die wir in Satz 2.2 aufstellen. In Kapitel 4 zeigen wir erstmalig, daß wir eine noch bessere Abschätzung als Satz 2.6 erhalten können. Nachdem wir einen Zusammenhang zwischen den Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion und ihrer Ableitung, bzw. zwischen Dirichletschen L -Funktionen und ihren Ableitungen festgestellt haben, folgt in Kapitel 5 erstmalig ein solcher Zusammenhang für Dedekindsche Zetafunktionen. In Kapitel 6 stellen wir Aussagen von **C. Yildirim** [10] über die Nullstellenverteilung von höheren Ableitungen von $L(s, \chi)$ vor.

Inhaltsverzeichnis

Abstract	1
1 Einleitung	4
2 Dirichletsche L-Funktionen	11
2.1 Primitive Charaktere	13
2.2 Die Funktionalgleichung der Dirichletschen L-Funktionen	14
2.3 Die Nullstellen von $L(s, \chi)$	16
2.4 Die Nullstellen von $L'(s, \chi)$	16
2.5 Beziehungen zwischen den Nullstellen von $L(s, \chi)$ und $L'(s, \chi)$	18
3 Beweis von Satz 2.6	19
4 Eine bessere Abschätzung	24
5 Dedekindsche Zetafunktionen	27
6 Höhere Ableitungen von $L(s, \chi)$	29
6.1 Einzelne Nullstellen	31
6.2 Nullstellenfreie Regionen rechts vom kritischen Streifen	32
6.3 Nullstellenfreie Regionen in der linken Halbebene	33
6.4 Die Anzahl der Nullstellen von $L^{(k)}(s, \chi)$	34
6.5 Die Nullstellen von $L^{(k)}$ für $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$	37
6.6 Der Beweis von Satz 2.5	39

A Hilfsmittel	41
A.1 Hilfsmittel aus der Analysis	41
A.2 Hilfsmittel aus der Funktionentheorie	41
A.3 Hilfsmittel aus der Zahlentheorie	43
Literaturverzeichnis	44

Kapitel 1

Einleitung

Sei $s = \sigma + it, i^2 = -1$. Die **Riemannsche Zetafunktion** ist definiert durch

$$(1.1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\sigma > 1).$$

Euler zeigte mit der eindeutigen Primfaktorzerlegung :

$$(1.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \quad (\sigma > 1)$$

Man kann $\zeta(s)$ auf $\sigma > 0$ analytisch fortsetzen, bis auf einen einfachen Pol bei $s = 1$.

Aus der **Funktionalgleichung**

$$(1.3) \quad \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

erkennt man eine Symmetrie um $\frac{1}{2}$, womit $\zeta(s)$ auf der gesamten komplexen Ebene definiert ist. Aus dem Eulerprodukt (1.2) wird ersichtlich, dass es keine Nullstellen in der Halbebene $\sigma > 1$ geben kann. Da die Gammafunktion keine Nullstellen hat, aber einfache Pole bei $s = 0, -1, -2, \dots$ (Siehe A.3), folgt nach der Funktionalgleichung (1.3) die Existenz der **trivialen Nullstellen** der Zetafunktion

$$\zeta(-2n) = 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

aber keiner weiteren in $\sigma < 0$. Da die Pole der Gammafunktion alle einfach sind, sind es die trivialen Nullstellen auch. **Nichttriviale Nullstellen** $\varrho = \beta + i\gamma$ können nur

im **kritischen Streifen** $0 \leq \sigma \leq 1$ liegen, aber nicht auf der reellen Achse, was man leicht aus der Identität

$$(2^{1-s} - 1) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$$

für $\sigma > 0$ erkennt. Da die Zetafunktion reell auf der reellen Achse ist, ergibt sich mit dem Spiegelungsprinzip eine weitere Funktionalgleichung

$$(1.4) \quad \zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}.$$

Daher liegen die nichttrivialen Nullstellen symmetrisch zur reellen Achse und zur **kritischen Geraden** $\sigma = \frac{1}{2}$. Es gibt unendlich viele nichttriviale Nullstellen: Wir definieren $N(T)$ als die Anzahl der Nullstellen $\rho = \beta + i\gamma$ mit $0 \leq \beta \leq 1$, $0 < \gamma \leq T$ (mit Vielfachheit). Riemann vermutete und von Mangoldt bewies die **Riemann-von Mangoldt-Formel**

$$(1.5) \quad N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + O(\log T).$$

Riemann bestimmte die "ersten" Nullstellen $\frac{1}{2} + i14.13\dots$, $\frac{1}{2} + i21.02\dots$, ... und stellte die berühmte, bisher unbewiesene **Riemannsche Vermutung** auf, dass alle Nullstellen im kritischen Streifen den Realteil $\frac{1}{2}$ haben, oder äquivalent

$$\zeta(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

Speiser [8] zeigte (In einer Arbeit über die Riemannsche Fläche der Zetafunktion), dass die Riemannsche Vermutung äquivalent ist zu der Aussage, dass $\zeta'(s)$ im Streifen $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ keine Nullstellen hat.

Auf der kritischen Gerade gibt es eine andere Beziehung zwischen den Nullstellen von $\zeta(s)$ und $\zeta'(s)$: Wir schreiben die Funktionalgleichung (1.3) als

$$(1.6) \quad \zeta(s) = \Delta(s)\zeta(1-s) \quad \text{mit} \quad \Delta(s) := \frac{(2\pi)^s}{2\Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}}.$$

$\Delta(s)$ ist eine meromorphe Funktion mit nur reellen Polen und Nullstellen. Nach der Stirlingschen Formel gilt

$$(1.7) \quad \Delta(s) = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{4} - t \log \frac{t}{2\pi e}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad (t \geq 1).$$

Differenzieren von (1.6) ergibt

$$(1.8) \quad \zeta'(s) = \Delta'(s)\zeta(1-s) - \Delta(s)\zeta'(1-s).$$

Dadurch folgt mit dem Spiegelungsprinzip, dass jede Nullstelle der Ableitung der Zetafunktion auf der kritischen Geraden eine mehrfache Nullstelle der Zetafunktion selbst ist:

$$(1.9) \quad \zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0.$$

Daher könnte man mit einem Beweis, dass $\zeta'(s)$ in $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$ keine Nullstellen hat, die Riemannsche Vermutung folgern, sowie die Aussage, dass alle Nullstellen der Zetafunktion einfach sind!

Levinson und Montgomery [6] erbrachten eine quantitative Version von Speisers überraschendem Ergebnis. Mit Hilfe des Argumentprinzips (Satz A.2) für die logarithmische Ableitung von (1.3) zeigten sie :

Satz 1.1 *Wenn $\varrho' = \beta' + i\gamma'$ die Nullstellen von $\zeta'(s)$ sind, dann ist*

$$\begin{aligned} & \#\left\{\varrho' : -1 < \beta' < \frac{1}{2}, T < \gamma' \leq T + H\right\} \\ &= \#\left\{\varrho : 0 < \beta < \frac{1}{2}, T < \gamma \leq T + H\right\} + O(\log(T + H)). \end{aligned}$$

Also gibt es genausoviel nichttriviale Nullstellen der Zetafunktion wie von ihrer Ableitung in der linken Hälfte des kritischen Streifens (bis auf einen kleinen hypothetischen Fehler).

Heath-Brown [3] zeigte denselben Sachverhalt, allerdings mit der logarithmischen Ableitung von (1.6).

Da dieser Beweis das Grundgerüst für den Beweis in Kapitel 3 ist, wird er hier explizit angegeben:

Beweis von Satz 1.1. Wir wenden auf $h(z) = \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ das Argumentprinzip an, da die Nullstellen von $h(z)$ genau die Nullstellen von $\zeta'(z)$, ihre Polstellen genau die Nullstellen von $\zeta(z)$ sind. Wähle T_1 und T_2 mit $T_1 < T_2$, so dass weder $\zeta(z)$ noch $\zeta'(z)$ Nullstellen haben für $t = T_j$, $-1 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$. Wir betrachten den Argumentwechsel auf dem Rechteck \mathcal{R} mit Eckpunkten $\frac{1}{2} - \delta + iT_1$, $\frac{1}{2} - \delta + iT_2$, $-1 + iT_2$ und $-1 + iT_1$

für ein kleines positives δ . Logarithmisches Ableiten der Funktionalgleichung (1.6) ergibt

$$(1.10) \quad \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{\Delta'}{\Delta}(s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1-s),$$

mit der Stirlingschen Formel ist

$$(1.11) \quad \frac{\Delta'}{\Delta}(s) = -\log \frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right) \quad (t \geq 1).$$

Linke Kante:

Da $\frac{\zeta'}{\zeta}(2+it)$ eine absolut konvergente Reihe ist, wie man aus der Logarithmischen Ableitung des Eulerprodukts (1.2) erkennt, ergibt sich aus (1.10) und (1.11)

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(-1+it) = -\log \frac{t}{2\pi} + O(1).$$

Damit ist $\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \leq 0$ für $\sigma = -1$ und somit die Änderung des Argumentes hier für $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll 1$.

Rechte Kante:

Wir betrachten zuerst $\sigma = \frac{1}{2}$. Aus (1.10) wird

$$\frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2}+it\right) + \frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2}-it\right) = \frac{\Delta'}{\Delta}\left(\frac{1}{2}+it\right).$$

Mit Anwendung des Spiegelungsprinzips (1.4) wird aus der linken Seite

$$2\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2}+it\right).$$

Mit (1.11) wird die rechte Seite zu

$$-\log \frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Also gilt:

$$(1.12) \quad \operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2}+it\right) \leq -1 \quad (t \neq \gamma).$$

für genügend große t .

In einer Umgebung einer Nullstelle $\varrho = \frac{1}{2} + i\gamma$ mit Vielfachheit $m(\varrho)$ haben wir:

$$\zeta(s) = (s - \varrho)^{m(\varrho)} \cdot \text{holomorpher Faktor},$$

also

$$\log \zeta(s) = m(\varrho) \log(s - \varrho) + \text{holomorpher Rest.}$$

Differenzieren liefert:

$$(1.13) \quad \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{m(\varrho)}{s - \varrho} + c + O(|s - \varrho|).$$

Mit $s = \frac{1}{2} + it \rightarrow \varrho$ folgt $\operatorname{Re} c \leq -1$, wegen (1.12), und mit $s = \frac{1}{2} - \delta + it$ erhalten wir

$$\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\frac{m(\varrho)\delta}{|s - \varrho|^2} + \operatorname{Re} c + O(|s - \varrho|) \leq -\frac{1}{2}$$

für genügend kleine $|s - \varrho|$. Damit folgt für genügend kleines δ (das nur von T_2 abhängt)

$$\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2} - \delta + it\right) \leq -\frac{1}{2}$$

für $T_1 \leq t \leq T_2$. Daraus folgt sofort, dass die Variation des Arguments von $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll 1$.

Horizontale Kanten:

$\zeta(s)$ and $\zeta'(s)$ sind beide $O(t^\sigma)$ für $\sigma \geq -2$ (nach Satz A.3). Nach Funktionalgleichung (1.6), (1.7) und (1.11) ist

$$\begin{aligned} \zeta(-1 + iT_j) &\gg T_j^{\frac{3}{2}}, \\ \zeta'(-1 + iT_j) &\gg T_j^{\frac{3}{2}} \log T_j. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Kanten von $-1 + T_j$ bis $\frac{1}{2} + T_j$, da die T_j so gewählt wurden, daß $\frac{1}{2} + T_j$ keine Nullstelle von $\zeta(s)$ und $\zeta'(s)$ ist.

Wir setzen

$$\Phi_0(s) = \zeta(s),$$

$$\Phi_1(s) = -e^{iT_j \log^2} \zeta'(s).$$

damit ist der Hauptterm der Dirichletreihe von Φ_k positiv bei $s = \frac{1}{2} + iT_j$ für $j = 1, 2$ und $k = 0, 1$.

Obere Kante: (untere analog)

Sei q nun die Anzahl der Nullstellen von $\operatorname{Re} \{\Phi_k(s)\}$ auf der Strecke $J = (-1 + iT_2, \frac{1}{2} + iT_2)$. Dann ist dieses Stück in wenigstens $q + 1$ Teilintervalle geteilt, auf denen $\operatorname{Re} \{\Phi_k(s)\}$ ein konstantes Vorzeichen hat. Daher beträgt die Veränderung von $\operatorname{Im} \{\log \Phi_k(s)\}$, also $\arg\{\Phi_k(s)\}$ höchstens π in jedem Teilintervall, da sich $\arg\{\Phi_k(s)\}$ und $\arg\{\zeta'(s)\}$ höchstens um eine Konstante unterscheiden auf J .

$$|\operatorname{Im} \{J\}| = |\operatorname{Im} \{[\log \Phi_k(s)]_{\frac{1}{2}+iT_2}^{-1+iT_2}\}| \leq (q + 1)\pi.$$

Wir bestimmen nun q .

Setze

$$f(z) = \frac{1}{2}\{\Phi_k(z + iT_2) + \overline{\Phi_k(\bar{z} + iT_2)}\}.$$

(Wenn $z = \sigma$ reel, folgt $f(z) = \operatorname{Re} \{\Phi_k(\sigma + iT_2)\}$)

Wir wählen T_2 so groß, daß

$$T_2 > T_1 + 2\left(\frac{1}{2} - (-1)\right) = T_1 + 3.$$

Sei $R := T_2 - T_1$.

Wir betrachten die z mit $|z - \frac{1}{2}| < R$. Dann ist

$$\operatorname{Im} \{z + iT_2\} > T_2 - R = T_1 > 0.$$

Damit ist $\Phi_k(z + iT_2)$ und also auch $f(z)$ analytisch für $|z - \frac{1}{2}| \leq R$. Sei $n(p)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ auf dem Kreis $|z - \frac{1}{2}| \leq p$. Wenn $r = 3$ und $r_1 = \frac{3}{2}$, erhalten wir:

$$\int_0^3 \frac{n(p)}{p} dp \geq n\left(\frac{3}{2}\right) \int_{\frac{3}{2}}^3 \frac{dp}{p} = n\left(\frac{3}{2}\right) \log 2.$$

Dabei gilt mit der Formel von Jensen (Satz A.4):

$$(1.14) \quad n\left(\frac{3}{2}\right) \leq \frac{1}{2\pi \log 2} \int_0^{2\pi} \log |f(3e^{i\theta} + \frac{1}{2})| d\theta - \frac{1}{\log 2} \log |f(\frac{1}{2})|.$$

Da $\zeta(s)$ und $\zeta'(s)$ beide $O(t^c)$ für große t , und

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{Re} \{\Phi_k(\frac{1}{2} + iT_2)\} \geq T_2^{\frac{3}{2}} \log T_2$$

folgt nach (1.14), dass

$$n\left(\frac{3}{2}\right) = O(\log T_2).$$

Die Nullstellen von $\operatorname{Re} \{\Phi_k(s)\}$ auf J entsprechen der gleichen Zahl Nullstellen von $f(z)$ auf $(-1, \frac{1}{2})$. Da $r_1 = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - (-1)$, ist $(-1, \frac{1}{2})$ im Kreis $|z - \frac{1}{2}| \leq 3$ enthalten. Daher ist $q \leq n(r_1)$, und die Variation des Arguments von $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O(\log T_2)$.

Damit ist die Variation des Arguments von $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \ll O(\log T_2)$ auf dem gesamten Rechteck \mathcal{R} . Mit dem Argumentprinzip folgt sofort (1.1). (Die eingeschränkten T_1 bzw. T_2 können natürlich nach (1.5) durch die willkürlicheren T , bzw. $T + H$ ersetzt werden, was den Fehler zu $O(\log(T + H))$ macht)

Kapitel 2

Dirichletsche L-Funktionen

Sei $q \in \mathbb{N}$; unter einem **Charakter** (oder **Restklassencharakter**) $\chi \bmod q$ versteht man eine Funktion $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften für alle $a \in \mathbb{Z}$:

$$a \equiv b \pmod{q} \Rightarrow \chi(a) = \chi(b)$$

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$$

$$\chi(a) \neq 0 \Leftrightarrow (a, q) = 1,$$

wobei (a, q) für den größten gemeinsamen Teiler (ggT) von a und q steht.

Die Menge der Charaktere $\bmod q$ ist eine Gruppe der Ordnung $g := \varphi(q)$ (Siehe A.10) mit neutralem Element χ_0 . Den Charakter $\chi_0 \bmod q$ mit $\chi_0(a) := 1$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ nennt man auch **Hauptcharakter $\bmod q$** . Aus $(\chi(a))^g = \chi(a^g) = \chi(1) = 1$ folgt, dass $\chi(a)$ ein Element der Menge

$$\left\{ \exp\left(\frac{2\pi i}{g}y\right) : 0 < y \leq g \right\}$$

aller **g -ten Einheitswurzeln** ist. Insbesondere ist $|\chi(a)| = 1$. Jedem Charakter $\chi \bmod q$ können wir eine Dirichlet-Reihe zuordnen, die wir mit $L(s, \chi)$ bezeichnen. Aufgrund der Multiplikatивität von $\chi(n)$ gilt in $\sigma > 1$, analog zu (1.2)

$$(2.1) \quad L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$$

Diese zunächst in $\sigma > 1$ holomorphen Funktionen werden als **Dirichletsche L-Funktionen** bezeichnet. Ist $\chi = \chi_0$ der Hauptcharakter, erkennt man durch Vergleich der Euler-Produkte in $\sigma > 1$

$$(2.2) \quad L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} (1 - p^{-s}).$$

Die analytischen Eigenschaften von $L(s, \chi_0)$ lassen sich damit aus den Ergebnissen für $\zeta(s)$ ablesen. Ist χ nicht der Hauptcharakter, so verhält sich die Reihe $L(s, \chi)$ deutlich anders.

Satz 2.1 *Sei χ ein Dirichlet-Charakter mod q , $\chi \neq \chi_0$. Dann ist die Reihe $\sum \chi(n)n^{-s}$ in Re $s > 0$ konvergent, und es gilt $L(1, \chi) \neq 0$*

(Zum Beweis, siehe [1]).

Mit (2.1) folgt direkt, daß $L(s, \chi)$ auf dem reellen Intervall $[1, \infty)$ stetig ist, und dort nirgends verschwindet. Also ist auch $\log L(s, \chi)$ eine stetige Funktion. Analog zur Zetafunktion existieren für $\sigma > 1$:

Ableitung

$$L'(s, \chi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) (\log n) n^{-s},$$

Inverses

$$(L(s, \chi))^{-1} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - \chi(p)p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \chi(n) n^{-s},$$

Logarithmische Ableitung

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = - \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) n^{-s}.$$

Mit den zahlentheoretischen Funktionen $\mu(n)$ (A.8) und $\Lambda(n)$ (A.9).

2.1 Primitive Charaktere

Sei χ ein Charakter mod q . Die Funktion $\chi|_{\{n : (n, q) = 1\}}$ hat Periode q , allerdings kann es noch kürzere Perioden geben. Sei q_1 die kürzeste Periode. Wir zeigen $q_1 | q$. Dazu schreiben wir $(q, q_1) = uq + vq_1$ mit $u, v \in \mathbb{Z}$; es folgt $\chi(n + (q, q_1)) = \chi(n)$. Also ist (q, q_1) eine Periode. Da q_1 die kürzeste war, folgt $q_1 \leq (q, q_1)$, was nur für $q_1 | q$ sein kann. Wir nennen χ **primitiv**, wenn $q = q_1$ gilt. Der Hauptcharakter wird nicht zu den primitiven Charakteren gezählt. Ist $q = p$ eine Primzahl, so ist jeder Charakter $\chi \neq \chi_0$ primitiv.

Sei χ_1 ein primitiver Charakter mod q_1 und q ein Vielfaches von q_1 . Dann lässt sich durch

$$\chi(n) = \chi_1(n), \text{ für } (n, q) = 1, \chi(n) = 0, \text{ für } (n, q) > 1$$

ein Charakter mod q konstruieren. Man sagt dann, χ werde von χ_1 **induziert**.

In diesem Kapitel sollen Resultate aus Kapitel 1 auf Dirichletsche L -Funktionen übertragen werden. Dabei reicht es, L -Funktionen zu primitiven Charakteren zu betrachten. Ist nämlich χ mod q von χ_1 mod q induziert, dann folgt aus den Euler-Produkten

$$(2.3) \quad L(s, \chi) = \prod_{p|q} (1 - \chi_1(p)p^{-s})^{-1} = L(s, \chi_1) \prod_{p|q} (1 - \chi_1(p)p^{-s}).$$

Damit ist die Frage der Fortsetzbarkeit von $L(s, \chi)$ auf das entsprechende Problem für $L(s, \chi_1)$ zurückgeführt. Bereits in (2.2) hatten wir das analytische Verhalten von $L(s, \chi_0)$ auf die Zetafunktion zurückgeführt.

In dieser Arbeit bezeichne χ stets einen primitiven Charakter mod q .

Bemerkung:

Wenn $q = p > 2$ eine Primzahl ist, gilt für reellwertige Charaktere

$$\chi(a) = \begin{cases} \left(\frac{a}{p}\right) & \text{falls } (a, p) = 1 \\ 0 & \text{falls } (a, p) \neq 1 \end{cases}$$

mit dem **Legendre-Symbol** $\left(\frac{a}{p}\right)$ (Siehe A.7).

2.2 Die Funktionalgleichung der Dirichletschen L-Funktionen

Wir beginnen mit der Beobachtung $\chi(-1)^2 = \chi(1) = 1$. Also gilt $\chi(-1) = \pm 1$. Wir müssen die Fälle $\chi(-1) = 1$ und $\chi(-1) = -1$ getrennt betrachten. (vgl. ([1])

Sei χ ein primitiver Charakter mod q mit $\chi(-1) = 1$. Dann ist $L(s, \chi)$ eine ganze Funktion in s , und es gilt

$$(2.4) \quad \pi^{-\frac{1-s}{2}} q^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) L(1-s, \bar{\chi}) = \frac{\sqrt{q}}{g(\chi)} \pi^{-\frac{s}{2}} q^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s, \chi).$$

Sei χ ein primitiver Charakter mod q mit $\chi(-1) = -1$. Dann ist $L(s, \chi)$ nach \mathbf{C} holomorph fortsetzbar, und es gilt

$$(2.5) \quad \pi^{-\frac{1}{2}(2-s)} q^{\frac{1}{2}(2-s)} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right) L(1-s, \bar{\chi}) = \frac{i\sqrt{q}}{g(\chi)} \pi^{-\frac{1}{2}(s+1)} q^{\frac{1}{2}(s+1)} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s, \chi),$$

wobei die Gaußsumme $g(\chi)$ definiert ist, als :

$$(2.6) \quad g(\chi) := \sum_{a=1}^k \chi(a) \exp(2\pi ia/k)$$

Für unsere Zwecke schreiben wir die Funktionalgleichungen um:

Satz 2.2 *Sei χ ein primitiver Charakter mod q . Sei*

$$\delta(\chi) = \begin{cases} 0 & , \quad \chi(-1) = 1 \\ 1 & , \quad \chi(-1) = -1 \end{cases}$$

Dann ist

$$L(s, \chi) = \Lambda(s, \chi) L(1-s, \bar{\chi}),$$

mit

$$(2.7) \quad \Lambda(s, \chi) = \Delta(s) \frac{g(\chi)}{q^s} \left(\frac{\cot \frac{\pi s}{2}}{i} \right)^{\delta(\chi)}$$

wobei

$$\zeta(s) = \Delta(s) \zeta(1-s)$$

Beweis von Satz 2.2 Umstellen der Funktionalgleichung der Zetafunktion (1.3) liefert

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \zeta(1-s),$$

womit $\Delta(s)$ definiert ist.

Sei $\delta(\chi) = 0$:

Umstellen von (2.4) liefert sofort

$$L(s, \chi) = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}}}{\pi^{-\frac{s}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \frac{q^{\frac{1-s}{2}} g(\chi)}{q^{\frac{s}{2}} \sqrt{q}} L(1-s, \bar{\chi})$$

und damit

$$L(s, \chi) = \Delta(s) \frac{g(\chi)}{q^s} L(1-s, \bar{\chi}).$$

Sei $\delta(\chi) = 1$:

Umstellen und Erweitern von (2.5) liefert

$$L(s, \chi) = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}}}{\pi^{-\frac{s}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \frac{g(\chi)}{iq^s} L(1-s, \bar{\chi}) \frac{\Gamma(\frac{2-s}{2})\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s+1}{2})\Gamma(\frac{1-s}{2})},$$

also

$$L(s, \chi) = \Delta(s) \frac{g(\chi)}{q^s} L(1-s, \bar{\chi}) \frac{1}{i} \frac{\Gamma(\frac{2-s}{2})\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s+1}{2})\Gamma(\frac{1-s}{2})}.$$

Der letzte Term kann vereinfacht werden. Mit Hilfe der Funktionalgleichung der Gammafunktion (A.4) erhalten wir

$$L(s, \chi) = \Delta(s) \frac{g(\chi)}{q^s} L(1-s, \bar{\chi}) \frac{1}{i} \frac{\Gamma(\frac{2-s}{2})\Gamma(\frac{s}{2})}{\frac{s-1}{2} \Gamma(\frac{s-1}{2})\Gamma(\frac{1-s}{2})}$$

Zweimaliges Anwenden der Legendreschen Verdopplungsformel (A.6) und die Formeln (A.5), (A.1) und (A.2) ergeben schließlich

$$L(s, \chi) = \Delta(s) \frac{g(\chi)}{q^s} L(1-s, \bar{\chi}) \frac{1}{i} \cot \frac{\pi s}{2}.$$

2.3 Die Nullstellen von $L(s, \chi)$

Aus der Funktionalgleichung folgt wegen der Pole der Gammafunktion die Existenz der sogenannten **trivialen Nullstellen** Dirichletscher L-Funktionen. Es gilt $L(s, \chi) = 0$ für $s = 0, -2, -4, -6, \dots$, wenn $\delta(\chi) = 0$, $L(s, \chi) = 0$ für $s = 0, -1, -3, -5, \dots$, wenn $\delta(\chi) = 1$. Diese Nullstellen sind alle einfach, da die Polstellen der Gammafunktion einfach sind.

Alle weiteren Nullstellen liegen in $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Aus Satz 2.2 folgt, dass, wenn ϱ eine komplexe Nullstelle von $L(s, \chi)$ ist, auch $1 - \bar{\varrho}$ eine Nullstelle ist. Das heißt die komplexen Nullstellen von $L(s, \chi)$ liegen symmetrisch zur kritischen Geraden. Es seien $\mathcal{N}(\chi)$ die Menge der Nullstellen von $L(s, \chi)$ und $N(T, \chi) = \#\{\varrho \in \mathcal{N}(\chi) : |\operatorname{Im} \varrho| \leq T\}$. Dann gilt als Analogon zur Riemann-von Mangoldt Formel (1.5) die Abschätzung für primitive Charaktere $\chi \bmod q$ (Vgl.[4]):

$$(2.8) \quad N(T, \chi) = \frac{1}{2\pi} T \log T + \frac{T}{2\pi} \log \frac{q}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log qT) + O(1)$$

Die **verallgemeinerte Riemannsche Vermutung (Generalized Riemann Hypothesis GRH)** besagt, dass die **nichttrivialen Nullstellen** aller L-Funktionen alle den Realteil $\sigma = \frac{1}{2}$ haben.

Bemerkung:

Da es unendlich viele L-Funktionen gibt, gibt es dementsprechend auch unendlich viele Riemannsche Vermutungen für L-Funktionen. Nicht berücksichtigt bei der GRH werden L-Funktionen zu Charakteren χ , die von Charakteren χ_1 induziert sind. Nach (2.3) haben diese zusätzlich zu den Nullstellen von $L(s, \chi_1)$ noch Nullstellen mit Realteil $\sigma = 0$, die interessanten Nullstellen sind allerdings die von $L(s, \chi_1)$. Daher beschränken wir uns bei χ auf primitive Charaktere.

2.4 Die Nullstellen von $L'(s, \chi)$

Es seien $\mathcal{N}_1(\chi)$ die Menge der Nullstellen von $L'(s, \chi)$ und $N_1(T, \chi) = \#\{\varrho' \in \mathcal{N}_1(\chi) : |\operatorname{Im} \varrho'| \leq T\}$. Yildirim [10] bewies:

$$N_1(T, \chi) = \frac{T}{\pi} \log \frac{gT}{2\pi em} + O(q \log T)$$

(m sei die kleinste Primzahl, die nicht q teilt)

Ferner zeigte er nullstellenfreie Regionen für $L'(s, \chi)$ rechts und links vom kritischen Streifen.

Für die rechte Seite:

Satz 2.3 *Es ist $L'(s, \chi) \neq 0$ für*

$$(2.9) \quad \sigma > 1 + \frac{m}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{m \log m}}\right)$$

Für die linke Halbebene:

Satz 2.4 *Für ein $\varepsilon \geq 0$ gibt es ein K , abhängig von ε und $\delta(\chi)$, so daß $L'(s, \chi) \neq 0$ gilt für $|s| > q$, $\sigma < -\varepsilon$, $|t| > \varepsilon$.*

Für $\sigma \leq -q$ gibt es natürlich auch die triviale Nullstellen auf, bzw. nahe bei der reellen Achse. Diese Aussagen sind Spezialfälle von Aussagen über $L^{(k)}(s, \chi)$, die wir in Kapitel 6 beweisen.

Interessant sind natürlich vor allem die Nullstellen von $L'(s, \chi)$ im kritischen Streifen. Yildirim liefert hier einen erstaunlichen

Satz 2.5 *Es gelte die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung. Wenn $\delta(\chi) = 0$ und $q \geq 216$, dann hat $L'(s, \chi)$ genau eine Nullstelle ρ_1 mit $0 \leq \operatorname{Re} \rho_1 < \frac{1}{2}$ bei*

$$(2.10) \quad \frac{1}{\log q} + O\left(\frac{\log \log q}{\log^2 q}\right)$$

Wenn $\delta(\chi) = 1$ und $q \geq 23$, dann hat $L'(s, \chi)$ keine Nullstellen in der linken Hälfte des kritischen Streifens.

Leider benötigt der Satz die Gültigkeit der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung, und auch die Einschränkungen für q verringern die praktische Anwendung. Der Beweis des Satzes steht am Ende von Kapitel 6, da er an dieser Stelle nicht benötigt wird.

Bemerkung:

Das Auftauchen einer einzelnen nichtreellen Nullstelle links der kritischen Geraden ist auch für die Ableitungen der Zetafunktion bekannt. So zeigte Spira [9] die Existenz einer Nullstelle von $\zeta''(s)$ in der Nähe von $-0,36 + i3,59$.

2.5 Beziehungen zwischen den Nullstellen von $L(s, \chi)$ und $L'(s, \chi)$

Für reelle Charaktere $\chi \bmod q$ gilt für L-Funktionen ein Spiegelungsprinzip, analog zu (1.4). Es ist

$$(2.11) \quad L(\bar{s}, \bar{\chi}) = \overline{L(s, \chi)}.$$

Wenn wir die Funktionalgleichung aus Satz 2.2 differenzieren, erhalten wir

$$L'(s, \chi) = \Lambda'(s, \chi)L(1-s, \chi) - \Lambda(s, \chi)L'(1-s, \chi).$$

Nach der Stirlingschen Formel ist:

$$\Lambda(s, \chi) = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{4} - t \log \frac{t}{2\pi e}\right)\right) \left(1 + \frac{2}{e^{i\pi s} - 1}\right)^{\delta(\chi)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad (t \geq 1)$$

Zusammen mit dem 2.11 folgt also, dass für reelle Charaktere jede Nullstelle von $L'(s, \chi)$ auf der kritischen Geraden eine mehrfache Nullstelle von $L(s, \chi)$ ist :

$$L'\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) = 0$$

Daher könnte man mit einem Beweis, dass $L'(s, \chi)$ in $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$ keine Nullstellen hat, die Riemannsche Vermutung für diesen Charakter folgern, sowie die Aussage, dass alle Nullstellen der entsprechenden Funktion $L(s, \chi)$ einfach sind.

Bemerkung

Es ist zu vermuten, dass dieser Zusammenhang auch für L -Funktionen zu komplexwertigen Charakteren $\chi \bmod q$ gilt, ich habe mich in dieser Arbeit eines solchen Beweises aber nicht angenommen.

Wir wollen uns in dieser Arbeit mit einer quantitativen Aussage über die Anzahl der Nullstellen von $L(s, \chi)$ und $L'(s, \chi)$ beschäftigen. Analog zu (1.1) gilt nämlich:

Satz 2.6 *Es bezeichne $\varrho = \beta + i\gamma$ die nichttriviale Nullstellen von $L(s, \chi)$, $\varrho' = \beta' + i\gamma'$ die nichttrivialen Nullstellen von $L'(s, \chi)$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} & \#\left\{\varrho' : -q < \beta' < \frac{1}{2}, T < \gamma' \leq T + H\right\} \\ &= \#\left\{\varrho : 0 < \beta < \frac{1}{2}, T < \gamma \leq T + H\right\} + O(\log(T + H)). \end{aligned}$$

Kapitel 3

Beweis von Satz 2.6

Wir wenden auch hier auf $h(z) = \frac{L'}{L}(s, \chi)$ das Argumentprinzip an. Wähle $T_1 \leq T_2$ so, dass weder $L(s, \chi)$ noch $L'(s, \chi)$ Nullstellen haben für $t = T_j, -q \leq \sigma \leq \frac{1}{2}, j = 1, 2$. (Davon können wir ausgehen, da die die Nullstellen einer nicht konstanten meromorphen Funktion keinen Häufungspunkt haben) Wir betrachten den Argumentwechsel auf dem Rechteck \mathcal{R} mit Eckpunkten $\frac{1}{2} - \delta + iT_1, \frac{1}{2} - \delta + iT_2, -q + iT_2$ und $-q + iT_1$ für ein kleines positives δ . Logarithmisches Ableiten der Funktionalgleichung für L-Funktionen (Vergleiche Satz 2.2) liefert

$$(3.1) \quad \frac{L'}{L}(s, \chi) = \frac{\Lambda'}{\Lambda}(s, \chi) - \frac{L'}{L}(1-s, \bar{\chi}).$$

Wie schon erwähnt ist nach der Stirlingschen Formel:

$$\Lambda(s, \chi) = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{4} - t \log \frac{t}{2\pi e}\right)\right) \left(1 + \frac{2}{e^{i\pi s} - 1}\right)^{\delta(\chi)} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad (t \geq 1).$$

Es ist

$$\frac{d}{ds} \log\left(\frac{1}{e^{i\pi s} - 1}\right) = -\frac{i\pi e^{i\pi s}}{e^{i\pi s} - 1} = O(1),$$

(Wegen $t \geq 1$ kann der Nenner nicht Null werden).

Zusammen mit (1.11) folgt also

$$(3.2) \quad \frac{\Lambda'}{\Lambda}(s, \chi) = -\log \frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right) \quad (t \geq 1).$$

Wir betrachten die linke Kante

Für $\sigma > 1$ gilt die Eulersche Produktdarstellung (2.1). Daher ergibt sich die logarithmische Ableitung von $L(1 + q + it, \bar{\chi})$ als absolut konvergente Dirichletreihe. Mit (3.2) erhält man

$$\frac{L'}{L}(-q + it, \chi) = -\log \frac{t}{2\pi} + O(1).$$

Da also $\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(-q + it, \chi) \leq 0$ für hinreichend große t ist, ergibt sich, dass auf der Kante ($\sigma = -q$) der Wechsel des Arguments von $\frac{L'}{L}(s, \chi) \ll 1$ ist.

Die beiden horizontalen Kanten

Hier können wir die Anzahl der Nullstellen von $L(s, \chi)$ und $L'(s, \chi)$ direkt bestimmen. Wir betrachten die Kanten von $-q + iT_j$ bis $\frac{1}{2} + iT_j, j = 1, 2$. Wir setzen:

$$\Phi_k(s, \chi) = (-1)^k \overline{\chi(m)} e^{iT \log m} L^{(k)}(s, \chi) \quad \text{für } (k = 0, 1).$$

wobei m die kleinste natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $\chi(n) \neq 0$ ist, bzw. wird $m = 1$ gesetzt, wenn $k = 0$. Damit ist der erste Summand in der Dirichletreihenentwicklung von $\Phi_k(\frac{1}{2} + iT_j, \chi)$ positiv.

Für die obere Kante gilt:

Sei l die Anzahl der Nullstellen von $\operatorname{Re} \{\Phi_k(s, \chi)\}$ auf der Strecke $J := [-q + iT_2, \frac{1}{2} + iT_2]$. Dann ist J in maximal $l + 1$ Teilintervalle geteilt, auf denen $\operatorname{Re} \{\Phi_k(s, \chi)\}$ konstantes Vorzeichen hat. Daher ist der Wechsel des Arguments von $\Phi_k(s, \chi)$ höchstens π in jedem Teilintervall. Auf ganz J beträgt also der Wechsel des Arguments

$$|\operatorname{Im} \{J\}| = |\operatorname{Im} \{[\log \Phi_k(s)]_{\frac{1}{2} + iT_2}^{-1 + iT_2}\}| \leq (l + 1)\pi.$$

Um l zu bestimmen, setzen wir

$$f(z, \chi) = \frac{1}{2} \{ \Phi_k(z + iT_2, \chi) + \overline{\Phi_k(\bar{z} + iT_2, \bar{\chi})} \}.$$

(Wenn $z = \sigma$ reel ist, gilt also $f(\sigma, \chi) = \operatorname{Re} \{ \Phi_k(\sigma + iT_2, \chi) \}$)

Wir wählen T_2 so groß, dass

$$T_2 > T_1 + 2 \left(\frac{1}{2} - (-q) \right) = T_1 + 1 + 2q.$$

Sei $R := T_2 - T_1$

Wir betrachten die z mit $|z - \frac{1}{2}| < R$. Dann ist

$$\operatorname{Im} \{z + iT_2\} > T_2 - R = T_1 > 0.$$

Damit ist $\Phi_k(z + iT_2, \chi)$ und also auch $f(z, \chi)$ analytisch für $|z - \frac{1}{2}| \leq R$. Sei $n(\omega)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ auf der Scheibe $|z - \frac{1}{2}| \leq \omega$. Setze $r = 1 + 2q$. Wir haben nun:

$$\int_0^r \frac{n(\omega)}{\omega} d\omega \geq n\left(\frac{r}{2}\right) \int_{\frac{r}{2}}^r \frac{d\omega}{\omega} = n\left(\frac{r}{2}\right) \log 2.$$

So ergibt sich mit der Formel von Jensen (Satz A.4)

$$(3.3) \quad n\left(\frac{r}{2}\right) \leq \frac{1}{2\pi \log 2} \int_0^{2\pi} \log \left|f\left(3e^{i\theta} + \frac{1}{2}\right)\right| d\theta - \frac{1}{\log 2} \log \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|.$$

Um die Terme auf der rechten Seite abzuschätzen, betrachten wir:

$$\begin{aligned} \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \operatorname{Re} \Phi_k\left(\frac{1}{2} + iT_2\right) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\log m)^k}{m^{\frac{1}{2}}} + \overline{\chi(m)} m^{iT_2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(\log n)^k \chi(n)}{n^{\frac{1}{2} + iT_2}} \right\} \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{(\log m)^k}{m^{\frac{1}{2}}} \quad (k = 0, 1). \end{aligned}$$

Da $L^k(s, \chi) = O(t^C)$ für $t \rightarrow \infty$ (Für $k = 0$ gilt $|L(s, \chi)| \leq 2q|s|$, für $\sigma \geq \frac{1}{2}$ nach ([2]). Die Abschätzung folgt so aus der Anwendung der Formel von Phragmén-Lindelöf (Satz A.3) auf $L(s, \chi)$ zusammen mit der Funktionalgleichung. Für $k = 1$ zusammen mit der Ableitung der Funktionalgleichung), folgt

$$n\left(\frac{r}{2}\right) \ll \log T_2.$$

Die Nullstellen von $\operatorname{Re} \{\Phi_k(s, \chi)\}$ auf J entsprechen der gleichen Zahl Nullstellen von $f(z, \chi)$ auf $(-q, \frac{1}{2})$. Da $\frac{r}{2} = \frac{1+2q}{2} = \frac{1}{2} - (-q)$, ist $(-q, \frac{1}{2})$ im Kreis $|z - \frac{1}{2}| \leq r$ enthalten. Daher ist $l \leq n\left(\frac{r}{2}\right)$, womit der Wechsel des Arguments von $L^{(k)}(s, \chi)$ auf $J \ll \log T_2$ ist. Damit ist der Argumentswechsel von $\frac{L'}{L}(s, \chi) = O(\log T_2)$ auf J . Der Beweis für die untere Kante läuft analog.

Die rechte Kante

Wir betrachten zuerst $\sigma = \frac{1}{2}$. Aus (3.1) wird

$$\frac{L'}{L} \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) + \frac{L'}{L} \left(\frac{1}{2} - it, \bar{\chi} \right) = \frac{\Lambda'}{\Lambda} \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right).$$

Für L-Funktionen gilt ein Spiegelungsprinzip, analog zu (1.4). Es ist

$$L(s, \bar{\chi}) = \overline{L(\bar{s}, \bar{\chi})} = \overline{L(\bar{s}, \chi)}.$$

Somit wird aus der linken Seite

$$2\operatorname{Re} \frac{L'}{L} \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right).$$

Mit (3.2) wird die rechte Seite zu

$$-\log \frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Also gilt:

$$(3.4) \quad \operatorname{Re} \frac{L'}{L} \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) \leq -1 \quad (t \neq \gamma),$$

für genügend große t .

In einer Umgebung einer Nullstelle $\varrho = \frac{1}{2} + i\gamma$ mit Vielfachheit $m(\varrho)$ haben wir:

$$L(s, \chi) = (s - \varrho)^{m(\varrho)} \cdot \text{holomorpher Faktor},$$

also

$$\log L(s, \chi) = m(\varrho) \log(s - \varrho) + \text{holomorpher Rest}.$$

Differenzieren liefert:

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = \frac{m(\varrho)}{s - \varrho} + c + O(|s - \varrho|).$$

Mit $s = \frac{1}{2} + it \rightarrow \varrho$ folgt $\operatorname{Re} c \leq -1$, wegen (3.4), und mit $s = \frac{1}{2} - \delta + it$ erhalten wir

$$\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(s, \chi) = -\frac{m(\varrho)\delta}{|s - \varrho|^2} + \operatorname{Re} c + O(|s - \varrho|) \leq -\frac{1}{2},$$

für genügend kleine $|s - \varrho|$. Damit folgt für genügend kleines δ (das nur von T_2 abhängt)

$$\operatorname{Re} \frac{L'}{L} \left(\frac{1}{2} - \delta + it, \chi \right) \leq -\frac{1}{2},$$

für $T_1 \leq t \leq T_2$. Daraus folgt sofort, dass die Variation des Arguments von $\frac{L'}{L}(s, \chi) \ll 1$.

Damit ist die Variation des Arguments von $\frac{L'}{L}(s) \ll O(\log T_2)$ auf dem gesamten Rechteck \mathcal{R} . Mit dem Argumentprinzip folgt sofort Satz 2.6. (Die eingeschränkten T_1 bzw. T_2 können natürlich nach (2.8) durch die willkürlicheren T , bzw. $T + H$ ersetzt werden, was den Fehler zu $O(\log(T + H))$ macht)

Kapitel 4

Eine bessere Abschätzung

Wir können zeigen, dass es möglich ist, den Fehler in Satz 2.6 zu minimieren. Es gilt:

Satz 4.1 *Es sei $R : 0 \leq t \leq T, 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$. Sei $N(T, \chi)$ die Anzahl der Nullstellen von $L(s, \chi)$ in R . Sei $N_1(T, \chi)$ die Anzahl der Nullstellen von $L'(s, \chi)$ in R . Für alle großen T , solange nicht $N(T, \chi) \geq \frac{T}{2}$ ist, existiert eine Folge $(T_j), T_j \rightarrow \infty$ mit $j \rightarrow \infty$, so dass gilt:*

$$N_1(T_j, \chi) = N(T_j, \chi) + O(1).$$

Beweis:

Sei $\{\varrho := \beta + i\gamma\}$ die Menge der Nullstellen von $L(s, \chi)$ im kritischen Streifen. Wir wenden das Argumentprinzip auf $\frac{L'}{L}(s, \chi)$ an. Es ist :

$$\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(s, \chi) = -\frac{1}{2} \log \frac{q}{\pi} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s + \delta(\chi)}{2} \right) + \operatorname{Re} B(\chi) + \operatorname{Re} \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{s - \varrho} + \frac{1}{\varrho} \right),$$

nach logarithmischem Ableiten der Funktionalgleichung (Vgl.[2]). $\operatorname{Re} B(\chi)$ ergibt sich als $-\sum_{\varrho} \operatorname{Re} \frac{1}{\varrho}$. Damit folgt

$$(4.1) \quad \operatorname{Re} \frac{L'}{L}(s, \chi) = -\frac{1}{2} \log \frac{q}{\pi} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{s + \delta(\chi)}{2} \right) + \operatorname{Re} \sum_{\varrho} \frac{1}{s - \varrho}.$$

Der Γ -Term ist $O(\log(t+2))$. Wir betrachten die Summe:

Aus Satz 2.2 folgt: Ist $\varrho = \beta + i\gamma$ Nullstelle, dann auch $1 - \bar{\varrho} = 1 - \beta + i\gamma$. ($\beta \leq \frac{1}{2}$).

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{s - \varrho} + \frac{1}{s + 1 + \bar{\varrho}} \right) = -2 \left(\frac{1}{2} - \sigma \right) \frac{(t - \gamma)^2 + (\sigma - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2} - \beta)^2}{|s - \varrho|^2 |s - 1 + \bar{\varrho}|^2}$$

Setze

$$(4.2) \quad I_1 := 2 \sum_{\beta \leq \frac{1}{2}} \frac{(t - \gamma)^2 + (\sigma - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2} - \beta)^2}{|s - \varrho|^2 |s - 1 + \bar{\varrho}|^2} + \sum_{\beta = \frac{1}{2}} \frac{1}{|s - \varrho|^2}.$$

Dann ist

$$(4.3) \quad I := \operatorname{Re} \sum_{\varrho} \frac{1}{s - \varrho} = -\left(\frac{1}{2} - \sigma\right) I_1.$$

Die linke Kante:

Da $\sigma = 0$ und $0 < \beta < \frac{1}{2}$ sind alle Terme von I_1 positiv, damit ist $I < 0$ und nach (4.1): $\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(s, \chi) < 0$.

Die rechte Kante

Außer bei $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0 \in \{\varrho\}$ mit $\beta_0 = \frac{1}{2}$ ist $I = 0$. Dann gilt $|s - \varrho|^{-2} \rightarrow \infty$ für $|s - \varrho_0| < \varepsilon$. Auf einem Halbkreis um ϱ_0 mit $\sigma < \frac{1}{2}$ ist also $I_1 > 0$, und so $I < 0$. Daher ist auf einem solchen Halbkreis $\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(s, \chi) < 0$. Also auch auf $\sigma = \frac{1}{2}$.

Die untere Kante

Hier folgt $\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(s, \chi) < 0$ mit (4.1), (4.2) und (4.3) aus der Tatsache, dass wir für viele L -Funktionen wissen, dass die GRH für kleine t erfüllt ist. Die L -Funktionen, für die wir eine solche Aussage nicht treffen können, haben in dem beschränkten Gebiet um die untere Kante aber höchstens endlich viele Nullstellen, für die $\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(s, \chi) \geq 0$. Dadurch erhalten wir unser $O(1)$ in Satz 4.1 Insbesondere tauchen für einige L -Funktionen zu reellwertigen Charakteren $\chi \bmod q$ auf der reellen Achse sogenannte **exzeptionelle Nullstellen β und $1 - \beta$** auf (Vgl [1]). Aber auch hierfür reicht $O(1)$ vollkommen aus.

Die obere Kante

Nehmen wir an, die Folge (T_j) mit $\lim_{j \rightarrow \infty} T_j = \infty$ und $\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(s, \chi) < 0$ bei $t = T_j, 0 < \sigma < \frac{1}{2}$ existiere nicht. Dann gibt es $(t_i)_{i \in I}$ mit $\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(s, \chi) \geq 0$ für einige $0 < \sigma < \frac{1}{2}$. Dann ist dort $I_1 < 0$ und es gilt:

$$\begin{aligned} (t - \gamma)^2 + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)^2 &< 0 \quad (\beta < \frac{1}{2}) \\ \Rightarrow |t - \gamma| &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sei $I = \mathbb{N}$, dann gibt es wenigstens ein ϱ mit $\beta < \frac{1}{2}$ und $|\gamma - n| < \frac{1}{2}$. Damit wäre in diesem Fall aber $N(T) \geq T + O(1)$, was uns zum Widerspruch führt.

Bemerkung: Der Beweis stellt in großen Teilen eine Verallgemeinerung des Beweises von Levinson und Montgomery für Satz 1.1 dar, der in Kapitel 1 schon erwähnt wurde. Es bleibt zu untersuchen, für welche Charaktere $\chi \bmod q$ der Fehler verschwindet. So tauchen z.B für komplexwertige Charaktere keine exzeptionellen Nullstellen auf, bzw. taucht für einige Charaktere bei $L'(s, \chi)$ eine einzelne Nullstelle auf (Siehe 2.10).

Kapitel 5

Dedekindsche Zetafunktionen

Für eine ausführlichere Darstellung und die Beweise der Sätze 5.1 und 5.2, siehe [5].

Definitionen:

Als **algebraischer Zahlkörper** oder kurz **Zahlkörper** bezeichnet man jeden Erweiterungskörper K des Körpers \mathbb{Q} der rationalen Zahlen, der als \mathbb{Q} -Vektorraum eine endliche Dimension $n = (K|\mathbb{Q})$ hat.

Ein Element α eines Zahlkörpers K heißt **ganz über \mathbb{Z}** , wenn es Nullstelle eines normierten Polynoms in $\mathbb{Z}[X]$ ist.

Die Menge $O_K = \mathbb{Z}_K$ aller über \mathbb{Z} ganzen Elemente des Zahlkörpers K ist die bezüglich Inklusion größte Ordnung von K . Wir nennen O_K **Ganzheitsring in k** .

Zu jedem algebraischen Zahlkörper K mit Ganzheitsring O_K bilden wir die **Dedekindsche Zetafunktion** von K durch die Summe über die ganzen Ideale $\mathcal{A} \neq \{0\}$ mit der Absolutnorm $N(\mathcal{A})$:

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathcal{A}} \frac{1}{N(\mathcal{A})^s}.$$

Satz 5.1 *Die Dedekindsche Zetafunktion $\zeta_K(s)$ eines Zahlkörpers K ist für $\sigma > 1$ absolut konvergent. Analog zur eindeutigen Primfaktorzerlegung in \mathbb{Z} liefern die Primideale eine eindeutige Primzerlegung im Zahlkörper. Daher besitzt $\zeta_K(s)$ in $\sigma > 1$ das über alle Primideale $\mathcal{P} \neq 0$ des Ganzheitsringes erstreckte Eulerprodukt*

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathcal{P}} \frac{1}{1 - N(\mathcal{P})^{-s}}.$$

Satz 5.2 *Es sei $m > 1$ eine natürliche Zahl und $K = \mathfrak{Q}(\exp \frac{2\pi i}{m})$ der m -te Kreisteilungskörper über \mathfrak{Q} . Dann stehen ζ_K , die Dirichletschen L -Funktionen $L(s, \chi)$ und die Riemannsche Zetafunktion in der Relation*

$$(5.1) \quad \zeta_K(s) = \zeta(s) \prod_{\chi} L(s, \chi).$$

Eine ähnliche Faktorisierung gilt auch in anderen Zahlkörpern, so ist z.B. in quadratischen Zahlkörpern

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L_d(s)$$

für eine Dirichletsche L -Funktion $L_d(s)$ (Vergleiche [5]).

Man erkennt sofort aus (5.1) für die Nullstellen der Dedekindschen Zetafunktionen:

$$\zeta_K(s) = 0 \Leftrightarrow \zeta(s) = 0 \quad \text{oder} \quad L(s, \chi) = 0.$$

Da für die logarithmische Ableitung von $\zeta_K(s)$ gilt

$$\frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(s) = \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{\chi} \frac{L'}{L}(s, \chi),$$

folgt aus den Beweise der Sätze 1.1 und 2.6:

Satz 5.3 *Sei K ein Zahlkörper in dem sich die Dedekindsche Zetafunktion faktorisieren läßt. Es bezeichne $\varrho_K = \beta_K + i\gamma_K$ die nichttriviale Nullstellen von $\zeta_K(s)$, $\varrho'_K = \beta'_K + i\gamma'_K$ die nichttrivialen Nullstellen von $\zeta'_K(s)$. Dann ist:*

$$\begin{aligned} & \# \left\{ \varrho'_K : 0 < \beta'_K < \frac{1}{2}, T < \gamma'_K \leq T + H \right\} \\ & = \# \left\{ \varrho_K : 0 < \beta_K < \frac{1}{2}, T < \gamma_K \leq T + H \right\} + O(\log(T + H)). \end{aligned}$$

Kapitel 6

Höhere Ableitungen von $L(s, \chi)$

Die in Kapitel 2.4 gemachten Aussagen von Yilderim (Vgl. [10]) über $L'(s, \chi)$ können auf k -te Ableitungen ($k \geq 1$) erweitert werden.

Wir betrachten $L(s, \chi)$ zu einem Charakter $\chi \bmod q$.

Lemma 6.1 *Es gelte die GRH. Mit $q \rightarrow \infty$ ist*

$$\frac{L'}{L}(1, \chi) \ll \log \log q.$$

Beweis:

$$-\frac{L'}{L}(1, \chi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n} = \sum_{n=2}^N + \sum_{n=N+1}^{\infty},$$

wobei N später bestimmt wird. Nach dem Primzahlsatz ist

$$\left| \sum_{n=2}^N \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n} \right| \leq \sum_{n=2}^N \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p \leq N} \frac{\log p}{p} + O(1) \ll \log N.$$

Da aufgrund GRH

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n)\chi(n) \ll x^{\frac{1}{2}} \log^2 qx$$

ist, ergibt Teilsumimation

$$\sum_{n \geq N} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n} \ll \frac{\log^2 qN}{\sqrt{N}}.$$

Mit der Wahl $N = \frac{\log^4 q}{(\log \log q)^2}$ ergibt sich das Gewünschte. Wenn wir diesen Beweis auf

einer Kreisscheibe vom Radius $\ll \frac{1}{\log \log q}$ um $s = 1$ führen erhalten wir

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) \ll \log \log q, \quad \text{für } |s - 1| \leq \frac{C}{\log q},$$

für $q \rightarrow \infty$. Wenn wir noch allgemeiner die Dirichletreihe für $(\frac{L'}{L})^{(j-1)}, j \geq 1$ berücksichtigen, ergibt sich

Lemma 6.2 *Es gelte die GRH. Mit $q \rightarrow \infty$ ist*

$$\frac{L^{(j)}}{L}(s, \chi) \ll (\log \log q)^j, \quad \text{für } |s - 1| \leq \frac{C}{\log q}.$$

Für die Betrachtung der Nullstellen höherer Ableitungen benötigen wir zuerst eine Aussage über die logarithmische Ableitung von $L^{(k)}(s, \chi)$.

Satz 6.3 *Es gelte die GRH. $k \geq 1$. Dann gilt für $q \rightarrow \infty$:*

$$\frac{L^{(k+1)}}{L^{(k)}}(0, \chi) = -\left(1 + \frac{1 - \delta(\chi)}{k}\right) \log q + O(\log \log q).$$

Beweis:

Wir schreiben die Funktionalgleichung aus Satz 2.2 um zu

$$L(1 - s, \chi) = g(\chi) 2^{1-s} \pi^{-s} q^{s-\frac{1}{2}} \cos \frac{\pi}{2}(s - \delta(\chi)) \Gamma(s) L(s, \bar{\chi}),$$

k -faches Ableiten beider Seiten liefert

Lemma 6.4 *Die k -fache Ableitung der Funktionalgleichung für Dirichletsche L -Funktionen lautet:*

$$(-1)^k L^{(k)}(1 - s, \chi) = \frac{2g(\chi)}{\sqrt{q}} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left\{ \left(\frac{q}{2\pi}\right)^s \cos \frac{\pi}{2}(s - \delta(\chi)) \Gamma(s) \right\}^{(j)} L^{(k-j)}(s, \bar{\chi}).$$

Wir definieren $l := \log \frac{q}{2\pi}$ und setzen $s = 1$. Lemma 6.4 wird für $q \rightarrow \infty$ zu:

$$(-1)^k L^{(k)}(0, \chi) = \begin{cases} \frac{g(\chi)\sqrt{q}}{\pi} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} l^j (1 + O(l^{-1})) L^{(k-j)}(1, \bar{\chi}) & \text{für } \delta(\chi) = 1, \\ \frac{-g(\chi)\sqrt{q}}{2} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} j l^{j-1} (1 + O(l^{-1})) L^{(k-j)}(1, \bar{\chi}) & \text{für } \delta(\chi) = 0. \end{cases}$$

Diesen Ausdruck kann man umschreiben zu

$$(-1)^k L^{(k)}(0, \chi) = \begin{cases} \frac{g(\chi)\sqrt{q}}{\pi} \left[\left(l + \frac{d}{ds} \right)^k L(s, \bar{\chi}) \right]_{s=1} (1 + O(l^{-1})) & \text{für } \delta(\chi) = 1, \\ \frac{-g(\chi)\sqrt{q}}{2} k \left[\left(l + \frac{d}{ds} \right)^{k-1} L(s, \bar{\chi}) \right]_{s=1} (1 + O(l^{-1})) & \text{für } \delta(\chi) = 0. \end{cases}$$

Sei $G_k(s, l) := (l + \frac{d}{ds})^k L(s, \bar{\chi})$, so daß $G_{k+1} = lG_k + G'_k$ (Der Strich bedeutet Ableiten nach s). Dann ist

$$-\frac{L^{(k+1)}}{L^{(k)}}(0, \chi) = \begin{cases} (l + \frac{G'_k}{G_k}(1, l)(1 + O(l^{-1}))) & \text{für } \delta(\chi) = 1, \\ \frac{k+1}{k}(l + \frac{G'_{k-1}}{G_{k-1}}(1, l)(1 + O(l^{-1}))) & \text{für } \delta(\chi) = 0. \end{cases}$$

Nun ist für $k \geq 0$:

$$\frac{G'_k}{G_k}(1, l) = \frac{\frac{L'}{L} + \frac{k}{l} \frac{L''}{L} + \dots + \frac{1}{l^k} \frac{L^{(k+1)}}{L}}{1 + \frac{k}{l} \frac{L'}{L} + \dots + \frac{1}{l^k} \frac{L^{(k)}}{L}}(1, \bar{\chi}) \ll \log \log q,$$

nach Lemma 6.1 und 6.2. Was den Beweis beendet.

6.1 Einzelne Nullstellen

Seien ϱ_k die Nullstellen von $L^{(k)}(s, \chi)$. Wir schreiben

$$(6.1) \quad \frac{L^{(k+1)}}{L^{(k)}}(s, \chi) = \frac{L^{(k+1)}}{L^{(k)}}(0, \chi) + \sum_{\varrho_k} \left(\frac{1}{s - \varrho_k} + \frac{1}{\varrho_k} \right),$$

und differenzieren (6.1) t -mal bei $s = 0$. So erhalten wir

$$\left(\frac{L^{(k+1)}}{L^{(k)}} \right)^{(t)}(0, \chi) = -t! \sum_{\varrho_k} \varrho_k^{-t-1}, \quad (t \geq 1).$$

Die linke Seite kann durch wiederholtes Anwenden von Satz 6.3 ausgewertet werden.

Das führt uns zu

Korollar 6.5 *Es gelte die GRH. ϱ_k laufe durch alle Nullstellen von $L^{(k)}(s, \chi)$, $k \geq 1$.*

Wenn $q \rightarrow \infty$, gilt für $t = 2, 3, \dots$

$$\sum_{\varrho_k} \varrho_k^{-t} = \begin{cases} \left(\frac{\log q}{k} \right)^t + O((\log q)^{t-1} \log \log q) & \text{für } \delta(\chi) = 0, \\ O((\log q)^{t-1} \log \log q) & \text{für } \delta(\chi) = 1. \end{cases}$$

Korollar 6.5 ist nützlich um nach ϱ_k nahe beim Ursprung zu suchen.

Nehmen wir $L^{(k)}(1-s, \chi) = 0$, mit $|s-1| \ll \frac{1}{\log q}$ an. Wir ordnen die rechte Seite von Lemma 6.4 nach Potenzen von l . Es genügt die zwei Hauptterme zu betrachten und den Rest mit l^j , $j \leq k-2$, in einen Fehlerterm zu stecken. Gemäß Lemma 6.2 muß sich

$$(6.2) \quad \tan \frac{\pi}{2}(s - \delta(\chi)) = \frac{2}{k\pi} \log q + O(\log \log q)$$

ergeben.

Wenn $\delta(\chi) = 1$, dann ist $\tan \frac{\pi}{2}(s - \delta(\chi))$ nahe bei Null, wenn s nahe bei 1 ist, und (6.2) kann nicht erfüllt sein. Damit hat $L^{(k)}(s, \chi)$ keine Nullstellen innerhalb $O(\frac{1}{\log q})$ vom Ursprung.

Wenn $\delta(\chi) = 0$, dann hat (6.2) eine Lösung, die eine Nullstelle von $L^{(k)}(s, \chi)$ offenbart, bei

$$(6.3) \quad \frac{k}{\log q} + O\left(\frac{\log \log q}{\log^2 q}\right).$$

Diese Nullstelle nahe beim Ursprung für $\delta(\chi) = 0$ bewirkt den Hauptterm in Korollar 6.5.

6.2 Nullstellenfreie Regionen rechts vom kritischen Streifen

Satz 6.6 *Sei m die kleinste Primzahl, die nicht q teilt. Dann ist $L^{(k)}(s, \chi) \neq 0$ für*

$$\sigma > 1 + \frac{m}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k^2}{m \log m}}\right).$$

Beweis:

Sei $m = m(q)$ das kleinste $n \geq 1$ mit $\chi(n) \neq 0$. Dann ist m auch die kleinste Primzahl, die q nicht teilt. Nach dem Primzahlsatz ist $m = O(\log q)$. Von jetzt an soll $L(s, \chi)$ also immer mit $n = m$ beginnen. Es ist

$$L^{(k)}(s, \chi) = (-1)^k \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\chi(n)(\log n)^k}{n^s} \quad (\sigma > 0),$$

so dass

$$\begin{aligned} |L^{(k)}(s, \chi)| &\geq \frac{(\log m)^k}{m^\sigma} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^\sigma} && (\sigma > 1) \\ &> \frac{(\log m)^k}{m^\sigma} - \int_m^{\infty} \frac{(\log x)^k}{x^\sigma} dx && (\sigma > \frac{k}{\log m}) \\ &= \frac{(\log m)^k}{m^\sigma} - \frac{m^{1-\sigma} k!}{(\sigma - 1)^{k+1}} \sum_{j=0}^k \frac{(\log m)^j (\sigma - 1)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Sei $z := (\sigma - 1) \log m$. Wir haben also $|L^{(k)}(s, \chi)| > 0$, wenn

$$\frac{z^{k+1}}{k!m \log m} - \sum_{j=0}^k \frac{z^j}{j!} \geq 0.$$

Für diesen Typ von Polynom gibt es genau ein $z \in \mathbb{R}^+$ bei dem Gleichheit gilt. (Nach Pólya und Szegő [7]). Wir können $\sigma > 1 + \frac{k}{\log m}$ annehmen, so dass $z \geq k$ ist. Dann gilt

$$\sum_{j=0}^k \frac{z^j}{j!} \leq \frac{z^k}{k!} + kz^{k-1}(k-1)! \leq \frac{z^{k+1}}{k!m \log m},$$

wobei die letzte Ungleichung für $z \geq \frac{m \log m}{2} (1 + \sqrt{1 + \frac{4k^2}{m \log m}})$ erfüllt ist. Das Umschreiben dieser Bedingung für z in eine Bedingung für σ beendet den Beweis.

6.3 Nullstellenfreie Regionen in der linken Halbebene

Satz 6.7 *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K = K(k, \varepsilon, \delta(\chi))$, so dass es keine Nullstellen von $L^{(k)}(s, \chi)$ in der Region $|s| > q^K$, $\sigma < -\varepsilon$, $|t| > \varepsilon$ gibt.*

Beweis:

Nach Lemma 6.4 können wir sagen, $|L^{(k)}(1-s, \chi)| > 0$ gilt unter der Voraussetzung

$$\begin{aligned} & |\Gamma^{(k)}(s) \cos \frac{\pi}{2}(s - \delta(\chi)) L(s, \bar{\chi})| \\ & > \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \Gamma^{(j)}(s) \sum_{l=0}^{k-j} \binom{k-j}{l} (\log \frac{q}{2\pi})^l \frac{d^{k-j-l}}{ds^{k-j-l}} (\cos \frac{\pi}{2}(s - \delta(\chi)) L(s, \bar{\chi})). \end{aligned}$$

Sei $|t| > \varepsilon$, so dass $|\tan \frac{\pi}{2}(s - \delta(\chi))|$ beschränkt ist. Für $\sigma \geq 1 + \varepsilon$ sind $L^{(n)}(s, \chi)$ und $\frac{1}{L(s, \chi)}$ alle beschränkt. Da

$$(6.4) \quad \Gamma^{(j)}(s) = \Gamma(s) \left\{ (\log s)^j + \sum_{n=0}^{j-1} E_{nj}(s) (\log s)^n \right\}, \quad E_{nj}(s) = O\left(\frac{1}{s}\right),$$

erkennt man, dass (6.4) gilt, wenn $|\log s| > K \log q$, für genügend große $K = K(k, \varepsilon, \delta(\chi))$.

Die trivialen Nullstellen von $L(s, \chi)$ liegen bei $-2n - \delta(\chi)$ (Vgl. Kapitel 2) Da für reelle Charaktere nach dem Spiegelungsprinzip (2.11) $L(s, \chi)$ reellwertig auf der reellen Achse ist, folgt mit dem Satz von Rolle (Satz A.1), dass es ein $\alpha_k = \alpha_k(q, \varepsilon, \delta(\chi))$ gibt, so dass $L^{(k)}(s, \chi)$ genau eine reelle Nullstelle zwischen $(-1 - 2n - \delta(\chi), 1 - 2n - \delta(\chi))$ besitzt für $1 - 2n < \alpha_k$. Wenn χ ein komplexwertiger Charakter mod q ist, folgt mit dem Satz von Rouché (Satz A.5) die Existenz von Nullstellen mit dem Realteil zwischen $(-1 - 2n - \delta(\chi), 1 - 2n - \delta(\chi))$ für $1 - 2n < \alpha_k$. Diese Nullstellen tendieren immer mehr zur negativen reellen Achse, je weiter man nach links geht.

6.4 Die Anzahl der Nullstellen von $L^{(k)}(s, \chi)$

Sei $N_k(T, \chi)$, $k \geq 1$, die Anzahl der Nullstellen von $L^{(k)}(s, \chi)$ in einer Region $-q^K < \sigma < \sigma_k$, $|t| \leq T$, wenn $T \rightarrow \infty$. Wir wollen jetzt $N_k(T, \chi)$ berechnen. Wir wählen T so, dass $L^{(k)}(s, \chi)$ keine Nullstellen auf den Linien $t \pm iT$ hat, und σ_k sei groß genug um folgende Bedingungen zu erfüllen:

- (i) $L^{(k)}(s, \chi)$ hat keine Nullstellen für $\sigma \geq \sigma_k$.
- (ii)
$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^{\sigma_k}} \leq \frac{1}{2} \frac{(\log m)^k}{m^{\sigma_k}}.$$

(Das kleinste solche σ_k ist $\leq 1 + m(1 + \sqrt{\frac{1+2k^2}{m \log m}})$.)

Nach dem Argumentprinzip (Satz A.2) gilt

$$\begin{aligned} N_k(T, \chi) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\sigma_k - iT}^{\sigma_k + iT} + \int_{\sigma_k + iT}^{-q^K + iT} + \int_{-q^K + iT}^{-q^K - iT} + \int_{-q^K - iT}^{\sigma_k - iT} \right\} \frac{d}{ds} \log L^{(k)}(s, \chi) ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4). \end{aligned}$$

Die rechte Kante I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \log L^{(k)}(s, \chi) \Big|_{\sigma_k - iT}^{\sigma_k + iT} \\ &= \log \frac{(-1)^k \chi(m) (\log m)^k}{m^s} \Big|_{\sigma_k - iT}^{\sigma_k + iT} + \log(1 + h(s)) \Big|_{\sigma_k - iT}^{\sigma_k + iT}, \end{aligned}$$

mit

$$h(s) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(\frac{\log n}{\log m})^k \chi(n) \overline{\chi(m)}}{\left(\frac{n}{m}\right)^s}.$$

Nach Bedingung (ii) für σ_k ist $|h(s)| \leq \frac{1}{2}$ bei $\sigma = \sigma_k$. Damit ist auf der Strecke $[\sigma_k - iT, \sigma_k + iT]$ die Variation des Arguments von $1 + h(s) \leq \pi$ und

$$I_1 = -2iT \log m + O(k \log \log m) + O(\sigma_k \log m) + O(1).$$

Die horizontalen Kanten I_2 und I_4 :

Zuerst I_2 . Wir setzen

$$\Phi_k(s, \chi) = (-1)^k \overline{\chi(m)} e^{iT \log m} L^{(k)}(s, \chi),$$

damit der Hauptterm der Dirichletreihe von $\Phi_k(\sigma_k + iT, \chi)$ positiv ist. Sei ν die Anzahl der Nullstellen von $\operatorname{Re} \Phi_k$ auf der Strecke $(-q^K + iT, \sigma_k + iT)$. Dann ist dieses Intervall in höchstens $\nu + 1$ Teilintervalle geteilt, in denen $\operatorname{Re} \Phi_k$ konstantes Vorzeichen hat. Daher ist der Wechsel des Arguments von $\Phi_k(s, \chi)$ auf dieser Strecke

$$|\operatorname{Im} I_2| \leq (\nu + 1)\pi.$$

Wir bestimmen nun ν . Es sei

$$f(z, \chi) = \frac{1}{2} \{ \Phi_k(z + iT, \chi) + \overline{\Phi_k(\bar{z} + iT, \bar{\chi})} \},$$

und $n(\omega)$ sei die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ in der Scheibe $|z - \sigma_k| < \omega$. Wenn wir $r = 2(\sigma_k + q^K)$ setzen, haben wir

$$\int_0^r \frac{n(\omega)}{\omega} d\omega \geq n\left(\frac{r}{2}\right) \int_{\frac{r}{2}}^r \frac{d\omega}{\omega} = n\left(\frac{r}{2}\right) \log 2.$$

Dann gilt nach der Formel von Jensen (Satz A.4) :

$$n\left(\frac{r}{2}\right) \leq \frac{1}{2\pi \log 2} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta} + \sigma_k)| d\theta - \frac{1}{\log 2} \log |f(\sigma_k)|.$$

Um die Terme auf der rechten Seite abzuschätzen, betrachten wir

$$\begin{aligned} |f(\sigma_k)| &= \operatorname{Re} \Phi_k(\sigma_k + iT, \chi) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\log m)^k}{m^{\sigma_k}} + \overline{\chi(m)} m^{iT} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(\log n)^k \chi(n)}{n^{\sigma_k + iT}} \right\} \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{(\log m)^k}{m^{\sigma_k}}. \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung folgt aus Bedingung (ii) für σ_k .

Außerdem ist in unserem Streifen $L^{(k)}(s, \chi) = O(|qs|^{Mq^K})$, wenn $t \rightarrow \infty$, mit $M = M(k)$. (Für $L(s, \chi)$ siehe Kapitel 3, für $L^{(k)}(s, \chi)$ benötigt man (6.4)). Daher folgt

$$\nu \leq n \left(\frac{r}{2} \right) \ll q^K \log q|s|$$

und

$$\text{Im } I_2 = O(q^K \log qT).$$

Für I_4 führt die analoge Argumentation zur gleichen Abschätzung.

Die linke Kante I_3 :

Aus Lemma 6.4 folgt

$$L^{(k)}(s, \chi) = \frac{g(\chi)\sqrt{q}}{\pi} \left(\frac{2\pi}{q} \right)^s e^{\frac{\pi}{2}i(1-\delta(\chi)-s)} \Gamma(1-s) \{R_1 + R_2\},$$

wobei R_1 der Anteil ist der von

$$\left\{ \left(\frac{2\pi}{\sqrt{q}} \right)^s \cos \frac{\pi}{2} (1 - \delta(\chi) - s) \Gamma(1 - s) \right\}^{(k)} \frac{\overline{\chi(m)}}{m^{1-s}}$$

kommt. R_2 kommt von

$$\left\{ \left(\frac{2\pi}{\sqrt{q}} \right)^s \cos \frac{\pi}{2} (1 - \delta(\chi) - s) \Gamma(1 - s) \right\}^{(k)} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\overline{\chi(n)}}{n^{1-s}} +$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \left\{ \left(\frac{2\pi}{\sqrt{q}} \right)^s \cos \frac{\pi}{2} (1 - \delta(\chi) - s) \Gamma(1 - s) \right\}^{(j)} L^{(k-j)}(1 - s, \overline{\chi}).$$

Wenn σ genügend groß negativ ist (Wenn K entsprechend groß ist), dann ist $|\frac{R_2}{R_1}(s)| < 1$, so dass das Argument von $|1 + \frac{R_2}{R_1}(s)|$ um weniger als π variiert, wenn s durch I_3 läuft. Dann ist

$$\begin{aligned} I_3 &= \left\{ \log \left(\frac{2\pi}{q} \right)^s + \log \Gamma(1 - s) + \log R_1 + \log \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{i\pi}{2} (1 - \delta(\chi)) \right\} \Big|_{-q^K + iT}^{-q^K - iT} \\ &= 2iT \log \frac{qT}{2\pi e} + O(q^K) + O(\log \log T). \end{aligned}$$

Wenn wir die Abschätzungen für I_1, I_2, I_3, I_4 zusammenfassen, erhalten wir:

Satz 6.8

$$N_k(T, \chi) = \frac{T}{\pi} \log \frac{qT}{2\pi em} + O(q^K \log T), \quad \text{mit } T \rightarrow \infty$$

6.5 Die Nullstellen von $L^{(k)}$ für $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$

Wir können also die Nullstellen von $L^{(k)}(s, \chi)$ folgendermaßen klassifizieren:

(i) Aus Kapitel 6.3 folgt:

Für $\sigma < q^K$, existieren Nullstellen im Abstand von ε von der negativen reellen Achse (Auf der reellen Achse für reellwertige χ). Wir können sie als die **trivialen Nullstellen** bezeichnen

(ii) Aus Kapitel 6.1 folgt:

Es gibt vereinzelte Nullstellen in $|s| \leq q^K, \sigma < -\varepsilon$.

(iii) Es gibt Nullstellen für $-\varepsilon < \sigma$. Diese nennen wir die **nichttrivialen Nullstellen**.

ε kann hierbei eine beliebig kleine feste Zahl sein. Wir wollen zeigen, dass fast alle dieser nichttrivialen Nullstellen auf der kritischen Gerade liegen.

Satz 6.9 *Es gelte GRH. Es gibt höchstens endlich viele Nullstellen von $L^{(k)}(s, \chi)$ im Streifen $-\varepsilon \leq \sigma < \frac{1}{2}$*

Beweis:

Induktion über k . Für $k = 0$ ist die Aussage durch GRH erfüllt.

Wir nehmen also an, dass es nur endlich viele Nullstellen $\varrho_k = \beta_k + i\gamma_k$ gibt von $L^{(k)}(s, \chi)$ mit $-\varepsilon \leq \beta_k < \frac{1}{2}$. Aus Satz 6.3 und (6.1) folgt

$$\frac{L^{(k+1)}}{L^{(k)}}(s, \chi) = -\left(1 + \frac{1 - \delta(\chi)}{k} + o(1)\right) \log q + \sum_{\varrho_k} \left(\frac{1}{s - \varrho_k} + \frac{1}{\varrho_k}\right),$$

wobei ϱ_k durch allen Nullstellen von $L^{(k)}(s, \chi)$ läuft. Wir teilen die letzte Summe in drei Teile:

$$\begin{aligned} \sum_1 & \text{ für } \beta_k < -q^K \\ \sum_2 & \text{ für } -q^K \leq \beta_k < \frac{1}{2} \\ \sum_3 & \text{ für } \beta_k \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Für $-\varepsilon < \sigma < \frac{1}{2}$ und große $|t|$ ist

$$\sum_1 = \sum_{\beta_k < -q^K} \left(\frac{1}{s - \beta_k} + \frac{1}{\beta_k}\right) + O\left(\frac{\varepsilon}{q^K}\right).$$

Für triviale ϱ_k setzen wir $a_j(k) := -\beta_k = (q^K + 2j) + O(1)$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Offensichtlich ist

$$\operatorname{Re} \sum_{a_j > q^K} \left(\frac{1}{s + a_j} - \frac{1}{a_j} \right) = -|s|^2 \sum_{a_j > q^K} \frac{1}{a_j |s + a_j|^2} - \sigma \sum_{a_j > q^K} \frac{1}{|s + a_j|^2}.$$

Den allerletzten Summationsterm schätzen wir ab durch

$$\sigma \sum_{a_j > q^K} \frac{1}{|s + a_j|^2} \ll \sum_{a_j > q^K} \frac{1}{a_j^2 + t^2} \ll \frac{1}{t}.$$

Die andere Summe untersuchen wir in zwei Teilen, mit $|a_j| \geq \frac{|s|}{2}$ und $|a_j| < \frac{|s|}{2}$. Wir haben

$$|s|^2 \sum_{a_j \geq \frac{|s|}{2}} \frac{1}{a_j |s + a_j|^2} \ll |s|^2 \sum_{a_j \geq \frac{|s|}{2}} \frac{1}{a_j^3} = O(1).$$

Wenn $|a_j| < \frac{|s|}{2}$, dann ist $|s + a_j| < \frac{3|s|}{2}$, so dass

$$|s|^2 \sum_{a_j < \frac{|s|}{2}} \frac{1}{a_j |s + a_j|^2} \leq -\frac{2}{9} \log \frac{|s|}{2} + O(K \log q).$$

Damit gilt für genügend große $|t|$:

$$\sum_1 \leq -\frac{1}{9} \log |s|.$$

Nach Induktionsannahme hat \sum_2 endlich viele Terme. Letztendlich ist noch

$$\operatorname{Re} \sum_3 = \sum_{\beta_k \geq \frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma - \beta_k}{|s - \beta_k|^2} + \frac{\beta_k}{|\varrho_k|^2} \right) < \sum_{\beta_k \geq \frac{1}{2}} \frac{\beta_k}{|\varrho_k|^2},$$

also ist $\operatorname{Re} \sum_3$ eine beschränkte Summe (Deren Wert von χ abhängt). Daher ist für $-\varepsilon < \sigma < \frac{1}{2}$ und genügend große $|t|$

$$\operatorname{Re} \frac{L^{(k+1)}}{L^{(k)}}(s, \chi) < 0,$$

womit die Zahl der Nullstellen endlich ist.

6.6 Der Beweis von Satz 2.5

Satz 2.5 besagt, dass die Nullstelle (6.3) die einzige von $L'(s, \chi)$ links der kritischen Geraden ist, wenn q groß genug ist.

Satz 2.5 *Es gelte die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung. Wenn $\delta(\chi) = 0$ und $q \geq 216$, dann hat $L'(s, \chi)$ genau eine Nullstelle ρ_1 mit $0 \leq \operatorname{Re} \rho_1 < \frac{1}{2}$ bei*

$$\frac{1}{\log q} + O\left(\frac{\log \log q}{\log^2 q}\right)$$

Wenn $\delta(\chi) = 1$ und $q \geq 23$, dann hat $L'(s, \chi)$ keine Nullstellen in der linken Hälfte des kritischen Streifens.

Beweis:

Mit GRH wird aus (4.1):

$$\operatorname{Re} \frac{L'}{L}(s, \chi) =$$

$$(6.5) \quad -\frac{1}{2} \log \frac{q}{\pi} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s + \delta(\chi)}{2}\right) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \sum_{\gamma} \frac{1}{\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + (t - \gamma)^2}.$$

Fall 1: $\delta(\chi) = 1$. Wir betrachten ein Rechteck mit den Eckpunkten $\pm iT, \frac{1}{2} \pm iT$ für ein großes T , welches kleine halbkreisförmige Ausbuchtungen um die Nullstellen von $L(s, \chi)$ auf der kritischen Geraden hat.

Auf den horizontalen Kanten

sind alle Terme von (6.5) negativ, so dass $\operatorname{Re} \frac{L'}{L} < 0$.

Auf der linken Kante

ist der letzte Term von (6.5) negativ. Für $|t| \geq 3$ ist $-\operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1+it}{2}\right) < 0$, und für $|t| < 3$ ist $\operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1+it}{2}\right) \geq \operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right)$. So ist, wenn $q > \pi e^{|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{1}{2})|}$ (z.B. $q \geq 23$), $\operatorname{Re} \frac{L'}{L} < 0$ auf $[-iT, iT]$.

Auf der rechten Kante,

wenn $q > \pi e^{|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{3}{4})|}$ (z.B. $q \geq 10$), ist $-\frac{1}{2} \log \frac{q}{\pi} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right) < 0$. Außerdem ist $\operatorname{Re} \sum \frac{1}{s-\rho} = 0$, wenn $\sigma = \frac{1}{2}$, während $\operatorname{Re} \sum \frac{1}{s-\rho}$ so groß negativ wie nötig auf den Ausbuchtungen gemacht werden kann, indem man die Halbkreise klein genug macht. Damit ist $\operatorname{Re} \frac{L'}{L} < 0$ auf und im Rechteck, wo $\frac{L'}{L}$ analytisch ist. Damit kann $L'(s, \chi)$ keine Nullstellen in $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$ haben.

Fall 2: $\delta(\chi) = 0$. Wir modifizieren das Rechteck, indem wir in einem genügend kleinen Halbkreis links um den Ursprung herum gehen. Auf den horizontalen Kanten und der kritischen Gerade argumentieren wir wie oben. Um $\operatorname{Re} \frac{L'}{L} < 0$ zu erhalten, müssen wir $q > \pi e^{|\operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{1}{4})|}$ setzen (z.B. $q \geq 216$). Bei $\sigma = 0$ ist $\operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(it) > -\gamma$ für alle $t \neq 0$ und $\lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(it) = -\gamma$. Wenn $|t| \geq 2$, dann ist $\operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{s}{2}) > 0$. Auf dem Halbkreis um 0 nimmt $\operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{s}{2})$ große positive Werte an. Daher ist $\operatorname{Re} \frac{L'}{L} < 0$ für $q \geq 216$ auf dem Rechteck. Da $\frac{L'}{L}$ aber einen Pol bei $s = 0$ hat, muss es nach dem Argumentprinzip genau eine Nullstelle von $L'(s, \chi)$ im Rechteck geben. Wir wissen nach (6.3) wo diese Nullstelle ist. Wenn $\chi \bmod q$ reellwertig ist, ist die Nullstelle auch reell.

Bemerkung:

Dieser Beweis hat große Ähnlichkeit mit dem Beweis in Kapitel 4. Dort konnten wir allerdings auf die exakte Berechnung von $\operatorname{Re} \frac{\Gamma'}{\Gamma}$, die uns hier die Einschränkungen für q liefert, verzichten, da wir genügend Abstand zur reellen Achse hatten, um die Abschätzung $O(\log(t+2))$ zu erfüllen.

Anhang A

Hilfsmittel

A.1 Hilfsmittel aus der Analysis

Ein Additionstheorem

$$(A.1) \quad \cot \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}.$$

Eine Folge des trigonometrischen Pythagoras

$$(A.2) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Satz von Rolle

Satz A.1 Sei f stetig auf dem Intervall $I := [a, b]$ und in (a, b) stetig differenzierbar. Gilt $f(a) = f(b)$, dann existiert $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

A.2 Hilfsmittel aus der Funktionentheorie

Unser wichtigstes Hilfsmittel in den Beweisen ist

Das Prinzip vom Argument

Satz A.2 Es sei f auf $U \in \mathfrak{C}$ meromorph und nicht konstant. γ injektiv umrande einen Teilbereich $V \subset U$. Es sei $N(0)$ die Anzahl der Nullstellen, $N(\infty)$ die Anzahl der Polstellen von f in V . Dann gilt :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N(0) - N(\infty)$$

wobei die linke Seite bis auf den Faktor $2\pi i$ der Gesamtänderung des Arguments von f auf γ entspricht

Abschätzungen für $L(s, \chi)$ erhalten wir mit dem

Satz von Phragmén-Lindelöf

Satz A.3 *es sei $f(s)$ eine in $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ holomorphe Funktion mit $f(s) = O_\varepsilon(e^{\varepsilon|t|})$. Gilt $f(\sigma_1 + it) = O(|t|^{k_1})$ und $f(\sigma_2 + it) = O(|t|^{k_2})$, dann auch $f(s) = O(|t|^{k(\sigma)})$ gleichmäßig in $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$; dabei ist $k(\sigma)$ die lineare Funktion mit $k(\sigma_1) = k_1$ und $k(\sigma_2) = k_2$.*

Die Fehlerterme ergeben sich durch

Die Formel von Jensen

Satz A.4 *Sei f in einer Umgebung von $|z| \leq R$ holomorph, es gelte $f(0) \neq 0$ und $f(z) \neq 0$ auf $|z| = R$. Seien z_1, \dots, z_n die Nullstellen von f in $|z| < R$, wobei jede Nullstelle mit ihrer Vielfachheit aufgelistet sei. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| + \log \frac{R^n}{|z_1 \dots z_n|} = \log |f(0)| + \sum_{i=1}^n \log \frac{R}{|z_i|}.$$

Der Satz von Rouché

Satz A.5 *Es seien f und g holomorph im Bereich U , weiter sei Γ Randzyklus des Teilbereichs $V \subset\subset U$. Gilt $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ auf Spur Γ , so haben f und g gleichviele Nullstellen in V (mit Vielfachheit gezählt).*

Die Gammafunktion

Sie wird meist durch das Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du$$

in $\operatorname{Re} z \geq 0$ definiert.

Die Polstellen von Γ erkennt man durch die

Darstellung von Γ nach Gauß

$$(A.3) \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Γ genügt folgender

Funktionalgleichung

$$(A.4) \quad z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

Zusammenhang zwischen Γ und der Sinusfunktion

$$(A.5) \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Legendresche Verdopplungsformel

$$(A.6) \quad \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-z}\Gamma(2z)$$

A.3 Hilfsmittel aus der Zahlentheorie

Das Legendre-Symbol

Es sei $2 < p \in \mathbb{P}$. Dann ist

$$(A.7) \quad \left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x^2 \equiv a \pmod{p} \text{ lösbar,} \\ -1 & \text{falls } x^2 \equiv a \pmod{p} \text{ unlösbar,} \\ 0 & \text{falls } p|a. \end{cases}$$

Zahlentheoretische Funktionen:

Die **Möbiussche μ -Funktion** ist erklärt durch:

$$(A.8) \quad \mu(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } n = 1, \\ 0 & , \text{ falls } n \text{ einen quadratischen Teiler } \neq 1 \text{ hat,} \\ (-1)^r & , \text{ falls } n = p_1 \dots p_r \text{ mit paarweise verschiedenen } p_i. \end{cases}$$

Die **von Mangoldtsche Λ -Funktion** ist erklärt durch:

$$(A.9) \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p & , \text{ falls } n = p^a, a \geq 0 \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die **Eulersche φ -Funktion** ist erklärt durch:

$$(A.10) \quad \varphi(n) = \sum_{\substack{1 \leq a \leq n \\ (a,n)=1}} 1.$$

Sie gibt z.B. die Ordnung der primen Restklassen mod n an

Literaturverzeichnis

- [1] J. BRÜDERN, *Einführung in die analytische Zahlentheorie*, Springer Verlag Berlin 1991
- [2] H. DAVENPORT, *Multiplicative Number Theory*, Springer Verlag, New York 1980
- [3] D.R. HEATH-BROWN, *Simple zeros of the Riemann zeta-function on the critical line*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 17-18
- [4] D. JOYNER, *Distribution theorems of L-functions*, Longman Scientific & Technical 1986
- [5] A. LEUTBECHER, *Zahlentheorie, eine Einführung in die Algebra*, Springer Verlag Berlin 1996
- [6] N. LEVINSON, H.L. MONTGOMERY, *Zeros of the derivative of the Riemann zeta-function*, Acta Math. **133** (1974), 49-65
- [7] G. PÓLYA, G. SZEGÖ, *Problems and Theorems in Analysis*, Springer Verlag, New York 1972
- [8] A. SPEISER, *Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion*, Math. Annalen **110** (1934), 514-521
- [9] R. SPIRA, *Zero-free Regions of $\zeta^{(k)}(s)$* , Journal London Math.Soc. **40** (1965), 677-682
- [10] CEM YILDIRIM, *Zeroes of derivatives of dirichlet L-functions*, Tr. J.of Mathematics **20** (1996), 521-534

Mein allererster Dank gebührt Herrn Prof. Dr. Rieger für seine Unterstützung und für seine außerordentlich begeisternde Zahlentheoretische Vorlesung, die in mir den Wunsch nach einer Vertiefung in diesem Bereich der Mathematik geweckt hat. Gleich anschließend möchte ich mich herzlich bei Dr. Jörn Steuding bedanken, der mich vor und während meiner Diplomarbeitszeit vorbildlich betreut hat und immer ein offenes Ohr für mich hatte. Ich wünsche ihm von dieser Stelle aus alles Gute für seine weitere Mathematikerkarriere.

Dank gebührt auch meinen Eltern, meiner Schwester Susanne und natürlich Katja, die für mich da war, auch wenn ich gaga wurde.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Hannover, den 20.08.1999